STOCHASTIK

Binomialverteilung

Einführung:

Kaum Theorie, aber viel Training

Mehr Theorie in 34012
Zusätzliche Aufgabensammlung in 34021

Ausführliche Erklärung des Einsatzes dreier Rechner:

Grafikrechner:	CASIO fx 9860
CAS-Rechner:	CASIO ClassPad II
	TI Nspire CAS

Datei Nr. 34 011

Stand: 8. Oktober 2015

Friedrich W. Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

https://mathe-cd.de

Inhalt

Hinweis: Die **Dreimal-Mindestens-Aufgabe** wird im Text 31110 besprochen

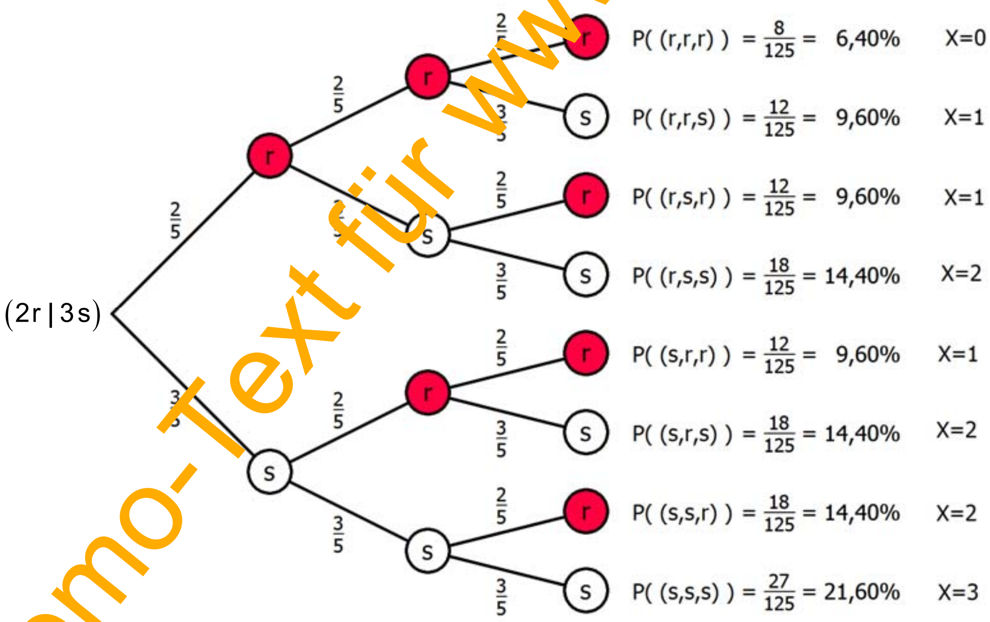
§ 1 Binomialverteilung – Einführung an Beispielen

1.1 Das Experiment „Ziehen mit Zurücklegen“

Viele Experimente bestehen aus einer Kette aufeinanderfolgender Einzelexperimente.
Bei deren Durchführung interessiert dann, wie oft ein bestimmtes Ergebnis eintritt.
Diese zählt man und weist diese Anzahl einer Variablen zu, die man **Zufallsvariable** (oder einfacher auch „Zählvariable“) nennt.

Beispiel 1: **Rote und schwarze Karten ziehen, nach jedem Zug wird wieder zurückgelegt.**

In einem Kartenstapel befinden sich 2 rote und 3 schwarze Karten. Man entnimmt daraus 3-mal eine Karte, schreibt ihre Farbe auf und legt sie wieder in den Stapel zurück, der gut durchgemischt wird.
Da sich durch das Zurücklegen der Karten der Bestand im Stapel nicht ändert, ist jede weitere Ziehung einer Karte dasselbe Experiment wie die erste Ziehung. Damit ändern sich die Wahrscheinlichkeiten bei den folgenden Ziehungen nicht.
Das folgende Baumdiagramm veranschaulicht das Experiment und zeigt alle 8 möglichen Ziehungen (Ergebnisse). Rechts am Rand gibt X die Anzahl der in jedem Ergebnis enthaltenen schwarzen Kugeln an. Hinter den Pfaden steht die Wahrscheinlichkeit, mit der dieses Ergebnis auftritt.
Wie man sie berechnet, wird auf der nächsten Seite erklärt.



Man nennt X eine **Zufallsvariable.** Hier gilt: **X ist die Zahl der gezogenen schwarzen Karten.**
Zu einer Zufallsvariablen gehört stets ein Definitionsbereich, der angibt, welche Zahlen die Variable X annehmen kann.

Hier gilt: $\mathbf{D} = \{0,1,2,3\}$ **,** denn man kann bei diesem Zufallsexperiment 0 bis 3 schwarze Karten ziehen.
Hinter dem Baumdiagramm steht zu jedem Pfad (Ziehungsergebnis) der entsprechende Wert von X.

Berechnung der zugehörigen Wahrscheinlichkeiten aus dem Baumdiagramm

Jeder Pfad stellt ein Ergebnis des Experiments dar.
Mit Hilfe der **Pfadregeln** an kann man zu jedem Pfad die Wahrscheinlichkeit berechnen:
Entlang eines Pfades werden die Wahrscheinlichkeiten multipliziert.
Die Wahrscheinlichkeiten einzelner (paralleler) Pfade werden addiert.

Man kann Ereignisse oft mit Hilfe einer Zufallsvariablen günstig formulieren:

Das Ereignis „X = 0“ (in Worten: Es wird keine schwarze Karte gezogen)
wird im 1. Pfad dargestellt.

$$P(X=0)=\left(\tfrac{2}{5}\right)^3=\tfrac{8}{125} \text{ oder } =0{,}4^3=0{,}064 \triangleq 6{,}4\%$$

Das Ereignis „X = 1“ (in Worten: Es wird genau eine schwarze Karte gezogen)
wird im 2., 3. und 5. Pfad dargestellt.

$$P(X=1)=\underbrace{\tfrac{2}{5}\cdot\tfrac{2}{5}\cdot\tfrac{3}{5}}_{\text{Pfad 2}}+\underbrace{\tfrac{2}{5}\cdot\tfrac{3}{5}\cdot\tfrac{2}{5}}_{\text{Pfad 3}}+\underbrace{\tfrac{3}{5}\cdot\tfrac{2}{5}\cdot\tfrac{2}{5}}_{\text{Pfad 5}}=\boxed{3}\cdot\left(\tfrac{2}{5}\right)^2\cdot\tfrac{3}{5}=\tfrac{36}{125}=0{,}288 \triangleq 28{,}8\%$$

Das Ereignis „X = 2“ (in Worten: Es werden genau zwei schwarze Karten gezogen)
wird im 4., 6. und 7. Pfad dargestellt.

$$P(X=2)=\underbrace{\tfrac{2}{5}\cdot\tfrac{3}{5}\cdot\tfrac{3}{5}}_{\text{Pfad 4}}+\underbrace{\tfrac{3}{5}\cdot\tfrac{2}{5}\cdot\tfrac{3}{5}}_{\text{Pfad 6}}+\underbrace{\tfrac{3}{5}\cdot\tfrac{3}{5}\cdot\tfrac{2}{5}}_{\text{Pfad 7}}=\boxed{3}\cdot\tfrac{2}{5}\cdot\left(\tfrac{3}{5}\right)^2=\tfrac{54}{125}=0{,}432 \triangleq 43{,}2\%$$

Das Ereignis „X = 3“ (in Worten: Es werden drei schwarze Karten gezogen)
wird im 8. Pfad dargestellt:

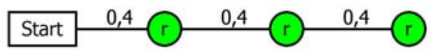
$$P(X=3)=\left(\tfrac{3}{5}\right)^3=\tfrac{27}{125}=0{,}216 \triangleq 21{,}6\%$$

Hinweis: Man sollte an Hand dieser Berechnungen eine Beobachtung machen:
Bei $P(X=1)$ treten 3-mal dieselben Pfad-Wahrscheinlichkeiten auf,
ebenso bei $P(X=2)$.

Dies wird uns <u>auf der nächsten Seite</u> entscheidend dabei helfen, diese Wahrscheinlichkeiten ohne Baumdiagramm zu berechnen.

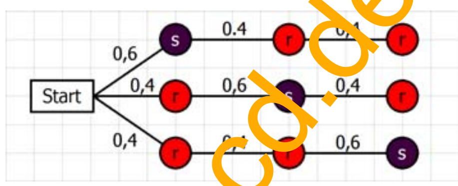
Ergebnisse mit gleichen Wahrscheinlichkeiten:

Zum Ereignis „X = 0“:



gehört ein einziger Pfad:
Dessen Wahrscheinlichkeit kann man auch ohne Baum sofort angeben: $P(X=0)=0{,}4^3$.

Das Ereignis „X = 1“:

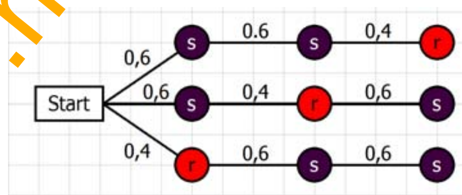


Das Ziehungselement $\boxed{s}$ steht jedes Mal auf einem anderen Platz. Damit ergeben sich drei verschiedene Ziehungsergebnisse (Pfade), die alle dieselbe Wahrscheinlichkeit haben, nämlich $0{,}6\cdot 0{,}4^2$,

eben weil zur schwarzen Karte <u>immer</u> $p_s = 0{,}6$ gehört und zu den roten immer $p_r = 0{,}4$.
Daran ändert sich während des Ziehungsverlaufs nichts, weil ja jedes Mal wieder zurückgelegt wird. **Für alle drei Pfade zusammen erhält man dann <u>dreimal</u> die Wahrscheinlichkeit** $0{,}6\cdot 0{,}4^2$:

$$P(X=1)=\boxed{3}\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4^2$$

Das Ereignis „X = 2“:



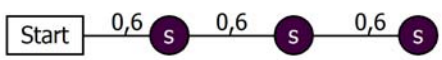
Dazu gehören ebenfalls drei Pfade:
Jetzt kann das Element $\boxed{r}$ auf einem von drei Plätzen liegen, also gibt es auch hier drei mögliche Ziehungsergebnisse (Pfade).

Alle drei haben dieselbe Wahrscheinlichkeit, nämlich $0{,}6^2\cdot 0{,}4$, eben weil zu den zwei schwarzen Karten $p_s = 0{,}6$ gehört und zu der roten eben $p_r = 0{,}4$.

Für alle drei Pfade zusammen erhält man daher dreimal die gleiche Wahrscheinlichkeit:

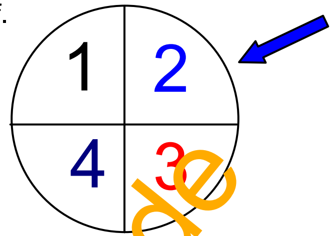
$$P(X=2)=\boxed{3}\cdot 0{,}6^2\cdot 0{,}4$$

Das Ereignis „X = 3“:



Dazu gehört ein einziger Pfad:
Daraus folgt: $P(X=3)=0{,}6^3$.

1.2 Das Glücksrad – ganz ausführliche Berechnung mittels Kombinatorik fürs Verständnis!



Bei einem „idealen“ Rad tritt jede Zahl mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auf.
Dies ist hier $\frac{1}{4}$, weil alle 4 Felder gleichwahrscheinlich sind.
Wir drehen das Rad für ein **Spiel** 5-mal und interessieren uns nur für die Ereignisse $\{1\}$ und $\{2,3,4\}$, was wir mit $\{\overline{1}\}$ (nicht-Eins) abkürzen.

Weil sich die Wahrscheinlichkeiten bei den Drehungen nicht ändern, entspricht dieses Experiment dem Ziehen mit Zurücklegen.

*Hier unsere **Spielregel**: Die Gewinnzahl ist die 1.*
***Gewinnplan:** Bei 5 Einsen gewinnt man 100 €, bei 4 Einsen 20 €, bei 3 Einsen 1 €, in allen anderen Fällen gibt es nichts. Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten für diese Gewinne?*

Unbedingt notwendige Vorbereitungen der Berechnung:

(1) Man definiert eine **Zufallsvariable**: X sei die Anzahl der erzielten Einsen.

(2) Bei n = 5 Drehungen (man nennt dies auch den Umfang der Stichprobe) ist der **Definitionsbereich** von X: $D = \{0,1,2,3,4,5\}$.

(3) Das Experiment besitzt diese **Grund-Wahrscheinlichkeiten**:
Für die 1: $p = \frac{1}{4} = 0{,}25$ und für Nicht-1: $q = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0{,}75$

Berechnung der Ziehungs-Wahrscheinlichkeiten für die Werte von X:

$\boxed{X=0}$: Ereignis: Bei 5 Drehungen wird keine 1 gedreht. Zugehöriger „Sammelpfad“:

$\text{Start} \xrightarrow{0{,}75} \boxed{\overline{1}} \xrightarrow{0{,}75} \boxed{\overline{1}} \xrightarrow{0{,}75} \boxed{\overline{1}} \xrightarrow{0{,}75} \boxed{\overline{1}} \xrightarrow{0.75} \boxed{\overline{1}}$

$P(X=0) = 0{,}75^5 \approx 0{,}237$

$\boxed{X=1}$: Ereignis: Bei 5 Drehungen wird genau eine 1 gedreht. Es gibt dazu 5 „Sammelpfade“:

$\xrightarrow{0{,}25} \boxed{1} \xrightarrow{0{,}75} \boxed{\overline{1}} \xrightarrow{0{,}75} \boxed{\overline{1}} \xrightarrow{0{,}75} \boxed{\overline{1}} \xrightarrow{0{,}75} \boxed{\overline{1}}$

$\xrightarrow{0{,}75} \boxed{\overline{1}} \xrightarrow{0{,}25} \boxed{1} \xrightarrow{0{,}75} \boxed{\overline{1}} \xrightarrow{0{,}75} \boxed{\overline{1}} \xrightarrow{0{,}75} \boxed{\overline{1}}$

$\xrightarrow{0{,}75} \boxed{\overline{1}} \xrightarrow{0{,}75} \boxed{\overline{1}} \xrightarrow{0{,}25} \boxed{1} \xrightarrow{0{,}75} \boxed{\overline{1}} \xrightarrow{0{,}75} \boxed{\overline{1}}$

$\xrightarrow{0{,}75} \boxed{\overline{1}} \xrightarrow{0{,}75} \boxed{\overline{1}} \xrightarrow{0{,}75} \boxed{\overline{1}} \xrightarrow{0{,}25} \boxed{1} \xrightarrow{0{,}75} \boxed{\overline{1}}$

$\xrightarrow{0{,}75} \boxed{\overline{1}} \xrightarrow{0{,}75} \boxed{\overline{1}} \xrightarrow{0{,}75} \boxed{\overline{1}} \xrightarrow{0{,}75} \boxed{\overline{1}} \xrightarrow{0{,}25} \boxed{1}$

Die 1 kann bei der ersten Drehung erscheinen, oder bei der zweiten, oder bei der dritten usw. Es gibt somit 5 Sammelpfade.

$P(X=1) = \boxed{5} \cdot \underbrace{0{,}25 \cdot 0{,}75^4}_{\text{Wahrscheinlickeit für einen Pfad}} \approx 0{,}40$

Übrigens: Auf jedem der Sammelpfade bedeutet das Ergebnis $\boxed{\overline{1}}$ eine der Zahlen 2, 3 oder 4.
Somit verbergen sich hinter jedem dieser Sammelpfade eigentlich $3^4 = 81$ Pfade.
Daher der Name „**Sammelpfad**“.

$\boxed{X=2}$: Bei 5 Drehungen wird genau zweimal eine 1 gedreht. Wie wir sehen werden, gibt es dazu 10 Sammelpfade, die wir nicht mehr aufschreiben. Ein Ereignispfad soll genügen:

$$\xrightarrow[0{,}25]{}\boxed{1}\xrightarrow[0{,}25]{}\boxed{1}\xrightarrow[0{,}75]{}\boxed{\bar{1}}\xrightarrow[0{,}75]{}\boxed{\bar{1}}\xrightarrow[0{,}75]{}\boxed{\bar{1}}$$

Die anderen Ereignispfade unterscheiden sich hiervon nur in der Belegung der Plätze. Mit anderen Worten: Andere Ergebnisse haben eine andere Reihenfolge für die beiden Einsen bzw. die der Nicht-Einsen.

Beispiel: $\xrightarrow[0{,}25]{}\boxed{1}\xrightarrow[0{,}75]{}\boxed{\bar{1}}\xrightarrow[0{,}75]{}\boxed{\bar{1}}\xrightarrow[0{,}25]{}\boxed{1}\xrightarrow[0{,}75]{}\boxed{\bar{1}}$

Weil die Wahrscheinlichkeit für jede Drehung konstant bleibt, haben alle diese Pfade (die zweimal 1 und dreimal $\bar{1}$ enthalten) dieselbe Wahrscheinlichkeit: $0{,}25^2 \cdot 0{,}75^3$

Wenn wir wissen, wie viele solche Anordnungen es gibt, dann können wir die Gesamt-Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $X = 2$ angeben.

Das Problem heißt also: Wie viele Pfade gibt es? Oder anders ausgedrückt:
Auf wie viele Arten kann man aus den fünf Plätzen zwei auswählen, und zwar für die $\boxed{1}$?

Die Kombinatorik lehrt uns, **wie man solche Platzauswahlen berechnet:**

Für die erste $\boxed{1}$ hat man 5 Plätze zur Auswahl, und in jedem dieser Fälle hat man für den zweiten dann noch 4 Plätze zur Auswahl. Das sind zusammen 20 Möglichkeiten.

Jetzt kommt das große ABER:

Bei der Platzauswahl kommt es nicht auf die Reihenfolge der Auswahl an.

Wählt man zuerst Platz 3 aus und dann Platz 2, dann hat man dieselben Plätze, wie wenn man zuerst Platz 2 und dann Platz 3 auswählt. Mit anderen Worten:

Die Vertauschung zweier Platznummern führt zu denselben Plätzen. Daher muss man das bisherige Ergebnis halbieren: Es gibt somit nur 10 statt 20 Möglichkeiten, und man schreibt das so auf: $m = \frac{5 \cdot 4}{2}$. Dafür wurde ein Symbol eingeführt: $m = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$

Dieses Symbol $\binom{5}{2}$ liest man 5 über 2 und heißt **Binomialkoeffizient**.

Also gibt es $\binom{5}{2} = 10$ verschiedene Pfade zu diesem Ereignis.

Ergebnis: $P(X=2) = \binom{5}{2} \cdot 0{,}25^2 \cdot 0{,}75^3 = \boxed{\frac{5 \cdot 4}{2}} \cdot 0{,}25^2 \cdot 0{,}75^3 \approx 0{,}264$

Binomialkoeffizienten werden ausführlich im Text 33011 – Kombinatorik – behandelt, und in 12106.

MERKE: Man kann auf $\binom{n}{k} = \frac{\overbrace{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}^{\text{k Faktoren}}}{k!}$ Arten k Plätze aus n Plätzen auswählen, wenn es nicht darauf ankommt, in welcher Reihenfolge diese Plätze ausgewählt werden, sondern nur welche Plätze man auswählt.

$\boxed{X=3}$: Bei 5 Drehungen wird genau dreimal eine 1 gedreht. Beispielpfad:

$$\xrightarrow[0,25]{}\boxed{1}\xrightarrow[0,25]{}\boxed{1}\xrightarrow[0,25]{}\boxed{1}\xrightarrow[0,75]{}\boxed{\bar{1}}\xrightarrow[0,75]{}\boxed{\bar{1}}$$

Jeder Pfad (mit drei Einsen) hat dieselbe Wahrscheinlichkeit: $0,25^3 \cdot 0,75^2$.

Nun die Anzahl der Pfade:

Man kann auf $\binom{5}{3}$ Arten 3 Plätze aus 5 Plätzen für die $\boxed{1}$ auswählen.

Also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit dafür, dass man bei 5 Drehungen genau dreimal die $\boxed{1}$ bekommt:

$$P(X=3)=\binom{5}{3}\cdot 0,25^3\cdot 0,75^2=\boxed{\frac{5\cdot 4\cdot 3}{3!}}\cdot 0,25^3\cdot 0,75^2\approx 0,088$$

$\boxed{X=4}$: Bei 5 Drehungen wird genau viermal eine 1 gedreht. Beispielpfad:

$$\xrightarrow[0,25]{}\boxed{1}\xrightarrow[0,25]{}\boxed{1}\xrightarrow[0,25]{}\boxed{1}\xrightarrow[0,25]{}\boxed{1}\xrightarrow[0,75]{}\boxed{\bar{1}}$$

Dieser hat die Wahrscheinlichkeit $0,25^4 \cdot 0,75$. Wie viele Ergebnispfade gibt es dazu?

Man kann aus 5 Pfad-Plätzen auf 5 Arten den Platz auswählen, auf den man $\bar{1}$ setzt. Die anderen Plätze bekommen dann die $\boxed{1}$

Ergebnis: $P(X=4)=\binom{5}{4}\cdot 0,25^4\cdot 0,75=\boxed{5}\cdot 0,25^4\cdot 0,75\approx 0,0146$

$\boxed{X=5}$: Bei 5 Drehungen wird genau fünfmal eine 1 gedreht. Es gibt dazu genau 1 Pfad:

$$\xrightarrow[0,25]{}\boxed{1}\xrightarrow[0,25]{}\boxed{1}\xrightarrow[0,25]{}\boxed{1}\xrightarrow[0,25]{}\boxed{1}\xrightarrow[0,25]{}\boxed{1}$$

$P(X=5)=0,25^5\approx 0,001$

Das kann man auch so schreiben: $P(X=5)=\binom{5}{5}\cdot 0,25^5=1\cdot 0,25^5\approx 0,001$,

denn $\binom{5}{5}=1$, und das passt dann ins Schema.

Hier die Zusammenfassung in verschiedenen Schreibweisen:

$$P(X=0)=\binom{5}{0}\cdot 0,25^0\cdot 0,75^5=\boxed{1}\cdot 0,75^5\approx 0,237$$

$$P(X=1)=\binom{5}{1}\cdot 0,25^1\cdot 0,75^4=\boxed{5}\cdot 0,25\cdot 0,75^4\approx 0,400$$

$$P(X=2)=\binom{5}{2}\cdot 0,25^2\cdot 0,75^3=\boxed{\frac{5\cdot 4}{2}}\cdot 0,25^2\cdot 0,75^3\approx 0,264$$

$$P(X=3)=\binom{5}{3}\cdot 0,25^3\cdot 0,75^2=\boxed{\frac{5\cdot 4\cdot 3}{3!}}\cdot 0,25^3\cdot 0,75^2=10\cdot 0,25^3\cdot 0,75^2\approx 0,088$$

$$P(X=4)=\binom{5}{4}\cdot 0,25^4\cdot 0,75=\boxed{5}\cdot 0,25^4\cdot 0,75\approx 0,0146 \qquad \binom{5}{4}=\binom{5}{1}=5$$

$$P(X=5)=\binom{5}{5}\cdot 0,25^5\cdot 0,75^0=\boxed{1}\cdot 0,25^5\approx 0,001$$